INSTITUTO Andalucía

# PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

12°

BACHILLERATO

# BLOQUE II

**Introducción**

El propósito de este bloque es ir más allá y ver la probabilidad como un instrumento esencial en tu día a día, pues es un elemento que de manera directa o indirecta (según sea el caso) influye en la toma de decisiones, por ejemplo ¿Cuántas veces no te has preguntado si lloverá, con el Fn de tomar la decisión sobre qué ropa y zapatos que usarás ese día?, o quizá ¿cuál es la ruta y transporte que debes elegir para llegar a un destino con el Fn de ahorrar tiempo e inclusive, dinero? y/o ¿cuál es la posibilidad de aprobar o no, alguna materia? En efecto el hecho de predecir futuros eventos demuestras la capacidad de en tenderlos.

Es elemental que hagas uso de las bases teóricas y prácticas como la teoría dela probabilidad (probabilidad clásica, simple y el muestreo aleatorio) y técnicas de conteo (árbol de probabilidad, conteo multiplicativo, combinaciones, permutaciones) estudiadas tanto en el curso de Probabilidad y Estadística I, como en el bloque anterior. En un primer momento identificarás eventos mutuamente excluyentes, no excluyentes e independientes, a partir de sus características específicas y posterior-mente dar un tratamiento específico para aplicar la probabilidad que más convenga.

En un segundo momento te adentrarás en la resolución de problemas de probabilidad a partir de algunas reglas como la condicional y teorema de Bayes, haciendo uso del árbol de probabilidad. Al concluir el bloque te darás cuenta de que los cono-cimientos con los que trabajarás te permitirán reconocer que la probabilidad se hace presente en tu vida cotidiana más de lo que te imaginas y que darle sentido al uso de ésta, completará tu habilidad analítica.

**Mapa de objetos de aprendizaje**


**Para iniciar, reflexiona**

El futuro es impredecible, todo se basa en probabilidades (Richard Phillips Feynman, físico teórico y premio Nobel estadounidense en 1965).

Siempre me recuerdo a mí mismo que lo que se observa es como mucho una combinación de probabilidades y resultados, no sólo resultados (Nassim Taleb, ensayista, investigador y financiero).

Para que sean útiles, nuestras creencias deben someterse a la lógica de la probabilidad (Daniel Hahneman, psicólogo, matemático, Premio Nobel de Economía en 2002).

Respecto a las frases anteriores, es posible tener una noción sobre los alcances de la probabilidad. Y después de conocer bases importantes de ésta en el primer bloque, es momento de aplicarla ¿con cuál de las Frases te identificas más al valorar el uso de la probabilidad?

En este bloque se presentarán reglas específicas para determinar las categorías de probabilidad, la finalidad es que puedas identificar las condiciones en que es posible el uso de cada una de las opciones de aplicación y a partir de ello puedas generar el grado de confianza en su uso al momento en que tengas que emplearlo en la toma de decisiones.

**Aprende más**

**Regla de los eventos mutuamente excluyentes, no excluyentes e independientes**

Después de lo expuesto en el último bloque del curso Probabilidad y Estadística I y en el primero de este libro de texto, seguramente recordarás que en el ámbito de la probabilidad existen los denominados eventos, que en términos más simples, son los posibles resultados que pueden presentarse en un experimento aleatorio en determinada situación.

Recurriremos a una de las actividades del libro Probabilidad y Estadística I, específicamente, una en que pusiste en práctica el juego tradicional de "los volados" ¿la recuerdas? Ahí se ubicaron dos eventos A (cae águila) y B (cae sol).

| Paso 1 | Paso 2 | PAso 3 |
|---|---|---|
| "Un volado" | Retomando el cálculo de la probabilidad clásica<br><br>*P= # de casos posibles/ # total de casos.* | Al sustituir, tenemos que... |
| Evento A: cae águila | | La probabilidad de que" caiga" águila es:<br><br>*A= 1/2 , es decir, 0.5 y;* |
| Evento B: cae sol | | La probabilidad de que "caiga" sol es:<br><br>*B= 1/2 que también es 0.5* |

Todo esto parece confirmar que la probabilidad de que caiga águila o sol (evento A o B) al lanzar una moneda es igual al 50% siempre y cuando se cumpla la condición de que sea al azar. Dicho todo esto, es momento de abordar qué sucede cuando dos eventos ocurren al mismo tiempo. La pregunta obligada es ¿cuál es la probabilidad de que ocurran los dos eventos al mismo tiempo?, es decir, P (A y B).

Escribe tu resultado y coméntalo con tus compañeros (as) y tu profesor (a).

Lo que acabamos de hacer es identificar si un evento es mutuamente excluyente.

¿Qué implicaciones tiene esto?

Si se lanza una sola moneda a la vez, únicamente obtendremos un resultado, es decir, o sale águila o sol. Por lo anterior, si tenemos dos o más eventos que pertenecen a un universo (S), al realizar el experimento solo puede ocurrir uno u otro resultado, pero no ambos al mismo tiempo.

***Excluyente: significa que puede separar definitivamente. Refiere a términos como apartar, separar, descartar al que no sea poseedor de dicho requisito.***

**Sabías que...**

La fórmula para eventos mutuamente excluyentes es: La cual se explica de la siguiente manera: "si A y B son evento mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de que A o B suceda es equivalente a la probabilidad del evento A más la probabilidad del evento B".Y que al calcular si un evento A y uno B son mutuamente excluyentes, el resulta-do siempre será "0" (cero), pues esto su-cede si esperamos que A y B ocurran de manera simultánea

***Simultánea: acciones, sucesos o procesos, ocurren o se desarrollan al mismo tiempo.***

Nota: es de suma importancia que recuerdes los símbolos de unión (U) e intersección (∩), puesto que serán de gran utilidad para comprender la probabilidad de los eventos.

A su vez se llaman eventos no excluyentes o conjuntos, cuando dentro del universo es posible que ocurran dos o más eventos conjuntamente al mismo tiempo ¿Notas la diferencia? A detalle, tendremos lo siguiente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

La anterior es una forma de expresar la ocurrencia de eventos no excluyentes y se lee: "sean dos eventos A y B. La probabilidad de la unión de estos eventos, P(A U B), se define como la probabilidad de que ocurra A, de que ocurra B, o de que ocurran ambos eventos". Una explicación con ejemplos aclarará las cosas.

En el Tele bachillerato comunitario "El platanar" se hace un estudio sobre la aprobación de dos asignaturas: Ecología del Medio Ambiente (E) y Filosofía (F), las cuales pertenecen a 6° semestre. Los resultados demuestran que la probabilidad de que un estudiante apruebe Ecología del Medio Ambiente 0.6. La probabilidad de aprobar filosofía es de 0.54. Y la de aprobar ambas es de 0.36. La pregunta de eventos no excluyentes corresponde a: ¿cuál es la probabilidad de que un o una estudiante apruebe Ecología del Medio Ambiente o Filosofía?

¡Nota importante! Resulta relevante subrayar que los eventos no necesariamente deben nombrarse con las letras A y B, sino que en algunos casos se les designa con la inicial del suceso en cuestión, como en el siguiente caso:

Evento (E) = aprobar ecología y medio ambiente

Evento ( ) = aprobar filosofía

Otra forma de presentar el problema puede ser de la siguiente forma:

P (E) = 0.6

P (F) = 0.54

P (E ∩) = 0.36

Al utilizar la fórmula del recuadro anterior, obtenemos lo siguiente:

P (E U) = P (E) + P ( ) – P (E ∩) = 0.6+0.54-0.36 = 0.78

A partir de los resultados anteriores, es posible definir que la probabilidad de que un estudiante de 6° semestre del Tele bachillerato "El Platanar" apruebe Ecología y Medio ambiente o Filosofía es de 0.78.

**Actividad de aprendizaje 1**

Retoma el ejercicio del bloque IV de tu curso Probabilidad y Estadística I en que definiste algunas probabilidades a partir de eventos de los 50 habitantes de tu comunidad.

Ahora que ya sabes en qué consisten los eventos mutuamente excluyentes y no excluyentes, aplica lo aprendido, primero realiza un cuadro y define las características de la población por cada caso. Después utiliza la siguiente tabla de contingencia para codificar los datos que obtuviste.

Eventos:

A: Es mujer

B: Es hombre

C: Es un habitante que asiste a la escuela

D: Es un habitante que habla lengua indígena

| | Habitante que asiste a la escuela | Habitante que habla lengua indígena | Habitante que asiste a la escuela y habla lengua indígena |
|---|---|---|---|
| Mujer | | | |
| Hombre | | | |

Cuestionario:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A y B, y qué tipo de evento es?________________________________________

2. ¿Qué probabilidad hay de que ocurra el evento A y D, y qué tipo de evento es?________________________________________

3. ¿Acaso existe probabilidad de que ocurra el Evento B, C y D, y qué tipo de evento es?_______________________________________

Comenta las respuestas obtenidas con tus compañeras y compañeros de clase e incluye los resultados en tu portafolio de evidencias.

Ahora veamos los eventos independientes. En lenguaje probabilístico esta independencia ocurre cuando A y B son dos eventos con probabilidades positivas.

Cuando se tiene la igualdad: P(B/A) = P(B) quiere decir que el evento B no depende de A, o que es independiente del evento A; no importa si ocurrió o no el evento A, puesto que la ocurrencia o no de A no afecta la ocurrencia del evento B.

De la definición de probabilidad condicional se tiene

[redacted] y [redacted]

Si B es independiente de A, entonces A es independiente de B.

Armando entrevistó a 150 personas (60 mujeres y 90 hombres) sobre el calzado que utilizan. De los resultados que obtuvo que 90 personas usan zapatos tenis, mientras que 60 no usa zapatos tenis. De este levantamiento, supongamos que el evento A es ser mujer, y que el evento B es usar zapatos tenis. La información completa del levantamiento se puede pre-sentar de la siguiente forma:

•90 mujeres

•60 hombres

•54 mujeres usan zapatos tenis

•36 hombres usan zapatos tenis.

•90 personas en total usan zapatos tenis.

Al organizar en una tabla de contingencia, la información se puede presentar de la siguiente manera:

| Tipo de calzado | Hombre | Mujer | Total |
|---|---|---|---|
| Usa zapatos tenis | 36 | 54 | 90 |
| No usa zapatos tenis | 24 | 36 | 60 |
| Total | 60 | 90 | 150 |

De la cual se pueden derivar los siguientes cálculos:

La probabilidad de que una persona (sin distinción de sexo) use zapatos tenis es de90/150= 0.60

En este caso P (B)=90/150=0.6

La probabilidad de que una persona use zapatos tenis dado que es mujer es: 54/90=0.6

Esto es: $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{54/150}{90/150} = 0.6$

De manera similar, la probabilidad de que una persona sea use zapatos tenis dado que es hombre es: 36/60=0.60

Esto es: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{36/150}{60/150} = 0.6$

Como se puede observar, el hecho de ser hombre o mujer no afecta la probabilidad de usar zapatos tenis.

Otra forma de abordar el tema de eventos independientes es a partir del siguiente ejemplo:

En un salón de clase, los estudiantes con los 5 mejores promedios podrán participaren una rifa de dos kits de útiles escolares.

Los seleccionados serán los alumnos que saquen fichas rojas de una caja, la cual contiene 2 fichas rojas, 2 fichas, y 1 verde.

Al sacar una ficha roja en el primer intento, observas el color y la pones de nuevo en la bolsa.

En un segundo intentas sacar una ficha roja.

¿Cuál es la probabilidad de sacar una canica roja ambas veces?

En el cálculo de probabilidades, hay que considerar que los eventos son independientes porque se regresa la primera ficha a la caja y en el segundo intento, las probabilidades de que salga una ficha roja ocurren en condiciones en que la caja contiene el mismo número y tipo de fichas que en su estado original.

Analizando con cálculo de probabilidades, sabemos que en el primer intento, la probabilidad de sacar una ficha roja es 2/5, porque hay 5 fichas y 2 de ellas son rojas.

Si volvemos a poner la ficha roja dentro de la caja, la probabilidad de sacar una ficha roja en un segundo intento sigue siendo 2/5, y eso se liga a que los dos eventos son independientes.

El resultado de un experimento no afecta el resultado del otro.

Al proyectar ¿qué hubiera pasado si no pones la primera ficha de nuevo en la caja? La probabilidad de sacar una ficha roja será diferente para el segundo intento. Si una ficha roja es eliminada, en el segundo intento la probabilidad será ahora de porque sólo quedan 4 canicas y una es roja.

| Situación | Probabilidad del 1er evento | Probabilidad del 2do evento | Probabilidad de ambos eventos |
|---|---|---|---|
| Sacar fichas | $P$ (rojo) = $\frac{2}{5}$ | $P$ (rojo) = $\frac{2}{5}$ | $P$ (ambos rojos) = $\frac{4}{25}$ |

Si A y B son eventos independientes, P(A y B) =P(A) • P(B).

En general, para cualquier número de eventos independientes, la probabilidad de que todos los eventos sucedan es el producto de las probabilidades de que sucedan los eventos individuales.

**Aprende más**

**Reglas de probabilidad**

En el ámbito de la probabilidad existen variadas reglas que responden a diversos cuestionamientos. Entre dichas reglas se encuentran la probabilidad de la unión; del complemento; de la diferencia; conjunta, condicional y Teorema de Bayes, por mencionar algunos. Es importante recalcar que en lo que respecta a este curso, nos centraremos en las dos últimas de las cuales ubicarás sus principales características e identificarás los elementos de un conjunto a partir de los tipos de eventos que ahí encuentres.

**Probabilidad condicional**

En ocasiones sucede que un evento influye en que otro se pueda presentar.

¿Recuerdas si has estado en una situación con esas características? En estadística se podría hacer referencia a la probabilidad condicional.

De manera formal, la probabilidad condicional se interpreta de la siguiente manera:

•Si se sabe que ya ocurrió el evento B, la probabilidad de que también haya ocurrido A se escribe: P (A|B) y se lee "la probabilidad de A dado B".

•P (A|B) equivale a calcular la probabilidad de A cuando el espacio muestral se reduce a B.

Y la fórmula para calcularla es la siguiente:

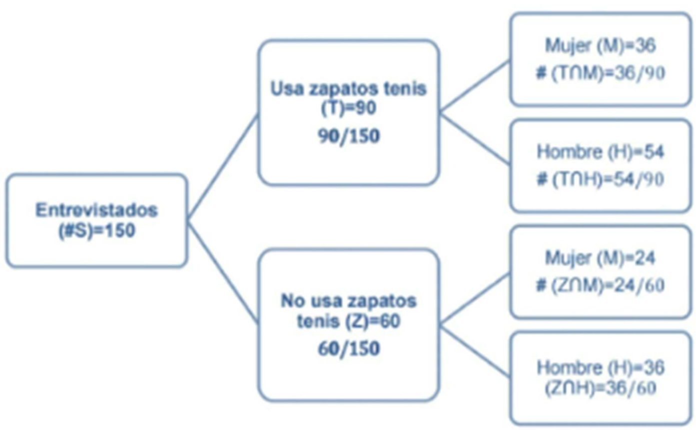
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Aplicando este concepto a los datos que obtuvo Armando y retomando que como su nombre lo indica, esta regla de probabilidad parte de una condición que puede ser: “seleccionar al azar a una mujer que usa zapatos tenis”, la Finalidad de esta condición puede ser de que Armando entreviste a la mujer para conocer su opinión sobre otros gustos en el ámbito del consumo.

| Tipo de calzado | Hombre | Mujer | Total |
|---|---|---|---|
| Usa zapatos tenis | 36 | 54 | 90 |
| No usa zapatos tenis | 24 | 36 | 60 |
| Total | 60 | 90 | 150 |

Haremos uso del árbol de probabilidad, el cual tuviste oportunidad de estudiar enel bloque anterior. Es importante destacar que se realiza a partir de la tabla de contingencia previa:

Árbol de probabilidad condicional




En cada caso, y una vez que están claras las condiciones para formular laprobabilidad, es posible calcular:

Es mujer dado que usa tenis = 36/90 = 0.4

Es hombre dado que usa tenis = 54/90 = 0.6

Es mujer dado que no usa zapatos tenis= 24/60 = 0.4

Es hombre dado que no usa zapatos tenis = 36/60=0.6

Como habrás podido observar, hay dos maneras para identificar la probabilidad condicional, una con la construcción del árbol de probabilidad, y la segunda a partir de la fórmula del recuadro.

Para desarrollar ésta última, tomaremos como condición la probabilidad de elegir a una mujer al azar dado que usa tenis (condición 1). Y tenemos lo siguiente: $P(T \cap M) = (P(T \cap M))/PM = P(T \cap M) = 36/90 = 0.4$

Al comparar el resultado anterior con la primera condición resultante del árbol de probabilidad de arriba, podemos concluir que coinciden. Por tanto, la interpretación es que la probabilidad de que una mujer elegida al azar use tenis es de 40%.

**Actividad de aprendizaje 2**

Para que tu aprendizaje sea más significativo, en este apartado podrás aplicar la probabilidad condicional, a partir de la siguiente tabla de datos:

Como puedes ver, se relaciona con las preferencias y gustos de jóvenes de una universidad, específicamente con los deportes, las artes y humanidades. ¡Demuestra tus conocimientos!

Instrucciones: Primero observa los datos de la tabla de contingencia. Posteriormente visualiza los posibles eventos que se pueden llevar a cabo y; construye el árbol de probabilidad en el espacio destinado para el mismo. Para concluir contesta y argumenta los cuestionamientos de abajo e incluye los resultados en tu portafolio de evidencias.

Aquí desarrolla tu árbol de probabilidad condicional:

Entrevista condicional: Supón que realizarás una entrevista a profundidad a uno delos o las jóvenes en cuestión.

1. ¿Cuál es la probabilidad de elegir a un hombre dado que su gusto y preferencia es el deporte? ___________________________________________

2. ¿Cuál es la probabilidad de elegir a una mujer al azar, dado prefiere las artes y humanidades? _____________________________________

3. Menciona la probabilidad de seleccionar a un hombre dado que centra su atención en el arte y humanidades. ____________________________________

4. Se requiere entrevistar a una mujer dado que le gusta el deporte ¿cuál es la probabilidad de elegirla al azar? ______________________________

Ahora elige y escribe en la siguiente tabla de control una condición y resuelve con la fórmula pertinente, posteriormente compara tus resultados e interpreta.

| **Tabla de resolución: probabilidad condicional** | |
|---|---|
| **Condición** | |
| **Calcular** | $P(A\|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ |
| **Resultado** | |
| **Interpretación** | |

Algo que ha faltado mencionar, es que la probabilidad condicional también es conocida como probabilidad a priori, pues al suceder un evento prosigue el interés de conocer cuál es la probabilidad de su efecto.

## Teorema de Bayes

El teorema de Bayes es una forma especial de conteo. Es un tema que se desarrolla cuando es difícil obtener de forma completa los puntos muestrales de un espacio, ya que no es posible realizar la numeración directa para obtener las probabilidades. En estos casos se emplea el análisis combinatorio.

Esta posibilidad simplifica el cálculo de las probabilidades con condicionales. Permite calcular la probabilidad de que ocurra un evento B si se sabe que ya ha ocurrido un evento A.

Se puede formalizar de la siguiente manera: P (B/A)

Y para calcularla es importante que sigas 3 pasos fundamentales:

1. Conocer la probabilidad como frecuencia relativa de que ocurra el suceso A, o sea P(A).
2. La probabilidad de que ocurra el suceso B es P (B).
3. La probabilidad de que ocurra el suceso A, si sabemos que ya ocurrió el suceso B, es P(A/B).