INSTITUTO Andalucía

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

12°

BACHILLERATO

Introducción

En este bloque aplicas las técnicas de conteo. Conocerás, cuáles son estas técnicas, y las aplicaciones que puede tener en tu vida cotidiana.

Primero analizarás los resultados posibles de un evento de probabilidad a través de la construcción de árboles de probabilidad. Posteriormente identificarás los principios fundamentales del conteo aditivo y multiplicativo, como herramientas en la solución de problemas. Y por último analizarás y clasificarás las semejanzas y diferencias de las permutaciones y combinaciones, al ponerlas en práctica en la solución de problemas en diversos contextos.

Uno de los temas más importantes en la estadística son los métodos de inferencia basados en las probabilidades, es decir, obtener respuestas de problemas concretos a partir de la inferencia. Los ejercicios que aquí se presentan tienen como objetivo que aprendas los conceptos y su aplicación a problemas concretos. Por ello le ponemos énfasis a que desarrolles tu intuición en su solución más que al uso de calculadoras, hojas de cálculo, etc., su uso es opcional y, seguramente te servirán para desarrollar tus habilidades y reforzar tu conocimiento. Por lo anterior, en el texto de cada bloque anexamos algunas referencias que podrás consultar y utilizar para profundizar el conocimiento de los temas.

Para iniciar, reflexiona

Para que un informe basado en una muestra tenga valor, debe utilizar una muestra Representativa, en que se hayan eliminado todos los posibles factores de influencia. En este punto (…) muchas de las cosas que usted lee en los periódicos y en las Revistas revelan su inherente falta de significado. Un psiquiatra informó una vez que prácticamente todo el mundo está neurótico.

Aparte del hecho de que tal uso de la palabra "neurótico" destruye todo su sindicado, Vamos a examinar la muestra utilizada por el doctor. Es decir, ¿a quién observó el Psiquiatra? Resulta que llegó a esta conclusión partiendo del estudio de Sus pacientes, que distan mucho de representar una muestra de la población. Si

Una persona no tuviera algún problema no hubiera acudido a un psiquiatra. Examine dos veces lo que lea, y evitará creer una cantidad enorme de cosas que no Son verdad. Vale la pena tener en cuenta también que la representatividad de una Muestra puede ser destruida con la mayor facilidad, tanto por influencia de factores Visibles como invisibles. Es decir, como menciona Huff incluso en el caso de que no pueda demostrarse que Existe un factor de influencia apreciable, conserve cierto grado de escepticismo Sobre los resultados, siempre que haya una posibilidad de influencia en alguna Parte. Y siempre la hay.

Con base en el texto anterior y en equipo con tus compañeros, respondan las

Siguientes preguntas:

1.- ¿Cuáles son los elementos que deciden que una muestra sea representativa y

¿Cuáles no? ___________________________________

2.- ¿Por qué es importante que conozcamos la representatividad de los datos que

Nos muestran en las noticias o en los estudios de mercado? _________

Sabías que...

Los juegos de azar son probablemente tan antiguos como el deseo humano de obtener algo a cambio de nada; pero sus implicaciones matemáticas no llegaron a apreciarse hasta que Fermat y Pascal redujeron a leyes el azar en 1654.

Aprende más

Una de las aplicaciones de las probabilidades más importantes en estadística es la inferencia estadística, que se liga a las formas en que podemos predecir que ocurra un evento teniendo información de cómo ha sucedido en una determinada población. Podemos hacer inferencia en un experimento determinado, cuando obtenemos datos a partir de muestras aleatorias o a partir de experimentos al azar.

La razón es que cuando utilizamos el azar para escoger a los individuos de una población para hacer una muestra o para proporcionar a determinados sujetos que están en un experimento, un tratamiento determinado, cada elemento o individuo de la población de que se trata tiene la misma probabilidad de ser elegido.

Las leyes de la probabilidad nos permitirán responder a la pregunta ¿qué ocurriría si lo repitiéramos muchas veces?, por lo que desarrollaremos algunos experimentos para comprender su aplicación. En tu curso de Probabilidad y Estadística I, conociste algunos de los elementos que componen una muestra. Las muestras son partes de una población, y deben seguir determinadas reglas para poder ser representativas.

Utilizamos muestras porque en general no podemos entrevistar a todas la población ya que sería muy difícil y caro. Por ejemplo cuando queremos saber la opinión de determinadas acciones del gobierno, conocer las tendencias electorales, o cuando realizamos un experimento de un medicamento.

Si elegimos los elementos integrantes de una muestra al azar, esto nos permitirá inferir resultados y considerar la opinión de quienes entrevistamos como si fuera la opinión de toda la población bajo ciertos parámetros que analizaremos más adelante. A esta muestra se denomina muestreo aleatorio simple, donde todos los elementos de la población estudiada tienen una misma probabilidad distinta de cero de ser seleccionados. Si lanzamos una moneda 10 veces, seguramente no salieron 5 águilas y 5 caras de la moneda. Sin embargo si lanzas una moneda muchas más veces, lo más probable es que obtengamos la proporción aproximada de una cara y de otra, aunque no exactamente en la misma proporción.

Esta posibilidad de obtener de una muestra al azar una aproximación de resultados a los resultados esperados que, en teoría deberían ser iguales, se denomina error aleatorio o de muestreo. Recordaremos también otros conceptos que nos permitirán comprender mejor la inferencia estadística.

Población en términos estadísticos la definimos como la totalidad del conjunto de nuestro interés y que es finita. La muestra es un subconjunto seleccionado de esta.

Por ejemplo, si quisiéramos saber la preferencia en el Distrito Federal (D.F.) por cada uno de los partidos políticos, ante la imposibilidad de encuestar a todos los habitantes del D.F., lo que podemos hacer es una encuesta entre las personas de ambos sexos con 18 años y más, y entre ellos seleccionaremos una muestra al azar con base en el padrón electoral.

La intención de esta selección es para que nos proporcione información relativa a la preferencia de esta población por los distintos partidos políticos.

La medición de la preferencia o no, es obtener una medida que sería en este caso = 1; donde supondríamos que cada una de las respuestas tienen la misma probabilidad 0.5 en caso de que se prefiera y 0.5 cuando no se prefiere. Al realizar la encuesta obtendremos la medición total de la preferencia de la muestra de la población tal y como se definió.

Para saber cuál es la estimación más precisa, tenemos lo que se llama grado de certidumbre, y se refiere a la diferencia existente entre lo que observamos y lo que en realidad se da en la población analizada.

Es decir, en el ejemplo analizado más arriba, conforme mayor sea el número de votantes seleccionados en la muestra, mayor será la certidumbre que tendremos de que el resultado obtenido sea acertado.

En resumen, cuando consideramos el muestreo nos interesa conocer la probabilidad que tiene un subconjunto de una población de aparecer en una muestra o, lo que es lo mismo, la probabilidad de que un grupo de personas con ciertas características se encuentren en una muestra obtenida de éste universo, y al definir un estudio o **experimento** determinado conocer lo acertado de nuestra hipótesis o la negación de ésta.

Experimento: es el proceso por medio del cual se realiza una observación. Ejemplo es tirar un dado, o dos, medir y determinar el número de bacterias por centímetro cúbico en un alimento determinado.

Actividad de aprendizaje 1

Instrucciones:

En cada una de las siguientes situaciones identifica la población de interés que representaría la muestra y explica como harías la recolección de una misma:

•Un político quiere saber si la mayoría de los habitantes de un Municipio está de acuerdo con la legislación relativa a las pensiones de adultos mayores.

____

•Un investigador quiere saber cuál es el promedio de consumo de agua para los hogares en una localidad.

____

•Un empresario quiere saber cuál es el tiempo promedio en que se mantienen prendidos los focos que se producen en su fábrica.

____

Aprende más

Cuando hablamos de una medida nos referimos a la relación que se establece entre los elementos de un conjunto de valores (conjunto que constituye una variable) es decir, a la relación entre los valores de la variable. Esto es, a los niveles de medida y características de aquello que representan las variables:

(nominal, ordinal, de intervalo y de razón) y según las relaciones que se establecen entre esos valores.

Como recordarás de tu curso de Probabilidad y Estadística I, una variable es un conjunto de valores que califican a todos los elementos de una determinada población, lo que permite la clasificación de éstos. Una variable V es un conjunto de *k* valores (V= v1, v2, v3, …, vk-1, vk) en el que agrupamos los *N* elementos de una determinada población *P*. Cada uno de los valores constituye un grupo de elementos de una población.

El conteo básico proporciona el número de elementos que encontramos en cada uno de los valores: la frecuencia de cada valor indica el número de veces que éste se repite en una población.

El próximo verano, el Presidente de México entregará un reconocimiento a los alumnos del Tele bachillerato comunitario. Se seleccionaron los tele bachilleratos que ya conoces el de Loma Bonita y de El Platanar. En la tabla siguiente se tiene la distribución del número de alumnos por semestre en que están inscritos. Cada categoría de la variable semestre que cursan, representa las frecuencias absolutas para cada categoría, y se cuenta son 278 alumnos entre los dos tele bachilleratos, 125 pertenecen al de Loma Bonita y 153 alumnos del Tele bachillerato "El Platanar".

Alumnos	Telebachillerato Loma Bonita	Telebachillerato El Platanar
Primer semestre	18	14
Segundo semestre	14	20
Tercer semestre	24	20
Cuarto semestre	32	35
Quinto semestre	16	29
Sexto semestre	21	35
Total	125	153

Como recordarás, en esta tabla las columnas que representa al número de alumnos por semestre, en cada uno de los tele bachilleratos representan las frecuencias y representan el número de veces que se repite cada valor en la población por categorías, en este caso el número de alumnos por semestre y por Tele bachillerato.

Estos elementos deben tomarse en cuenta si queremos elegir para la ceremonia un alumno como representante de cada Tele bachillerato, independientemente del semestre que los alumnos cursen.

Ahora bien, si queremos saber qué alumnos, que cursan cuál semestre tienen la mayor probabilidad de ser elegidos de cada Tele bachillerato para la ceremonia, para saberlo, calcularemos la distribución de la frecuencia relativa igual que como la calculaste en tu curso de Probabilidad y de Estadística anterior, como recordarás, esto se logra dividiendo el total de alumnos en cada uno de los tele bachilleratos entre el número de alumnos que se encuentran en cada semestre. Así obtenemos las dos siguientes columnas:

Alumnos	Tele-bachillerato Loma Bonita	Tele-bachillerato El Platanar	Frecuencia relativa Loma Bonita fr	Frecuencia relativa El Platanar fr
Primer semestre	18	14	0.144	0.092
Segundo semestre	14	20	0.112	0.131
Tercer semestre	24	20	0.192	0.131
Cuarto semestre	32	35	0.256	0.229
Quinto semestre	16	29	0.128	0.190
Sexto semestre	21	35	0.168	0.229
Total	125	153	1	1

Por lo tanto estas dos columnas muestran que los alumnos que se encuentran en el cuarto semestre tanto en el Tele bachillerato de Loma Bonita y de El Platanar tienen alta probabilidad de ser elegidos (0.256 y 0229 respectivamente). También quienes se encuentran en sexto semestre de este último tele bachillerato (0.229). En cambio, los que tienen menos probabilidad de ser elegidos son quienes están en el primer semestre de ambas comunidades.

Otro ejemplo lo tenemos en la tabla siguiente la cual contiene la distribución por edad de la comunidad de Loma Bonita. Esta distribución por edad es la variable y, el total en cada una de las categorías es decir los grupos de edad representan las frecuencias. Si queremos elegir al azar a las personas de esta comunidad que participarán en la organización de la fiesta comunitaria, y queremos saber quiénes tienen mayor probabilidad de ser elegidos, realizamos el mismo ejercicio anterior: calculamos la frecuencia relativa (fr) de la distribución por grupo de edad de la comunidad como sigue:

Edad (años)	*f*	Frecuencia relativa *fr*
Menos de 10	135	0.165
De 10 a 19	101	0.124
De 20 a 29	139	0.170
De 30 a 39	203	**0.248**
De 40 a 49	132	0.161
De 50 a 59	54	0.066
De 60 a 69	27	0.033
De 70 a 79	18	0.023
De 80 y mas	7	0.009
Total	820	**1**

En este caso, la probabilidad de elegir un individuo (al azar) perteneciente al grupo de personas que tienen entre 10 y 19 años de edad y por separado aquellos que tienen 80 años y más, se obtiene dividiendo el tamaño del grupo al que pertenecen entre el tamaño de la población:

En el primer caso:

P (x =10 a 19 años) = 1017/8202 = **0.12399**

En el segundo caso:

P (x >80) = 74 /8202 = **0.0090**

En este ejemplo, notarás que el valor de la frecuencia relativa, correspondiente al primer caso, es mayor que la del grupo de 80 años y más. Esto es debido a que en el grupo de 10 a 19 años lo componen un mayor número de personas que el de 80 y más. Pero quienes tienen mayor probabilidad de ser elegidos para la organización de la fiesta son quienes se encuentran en el grupo de 30 a 39 años de edad.

Por lo tanto, este ejercicio nos permite obtener dos conclusiones: uno al calcular la probabilidad de elegir al azar un evento, primero estaremos atentos a la distribución de frecuencia de la variable que vamos a analizar, para posteriormente calcular, a partir de ésta la frecuencia relativa, la cual se aproxima a la probabilidad mayor o menor de ocurrencia del evento que estamos buscando. En este ejemplo, al calcular la probabilidad de elegir al azar, a una persona perteneciente a la comunidad de un grupo de edad determinado, observamos que algunos grupos de edad tienen una mayor probabilidad de ser elegidos que otros.

Ahora bien, de las técnicas de conteo seguramente conoces la suma o adición, que representa la operación más elemental. La multiplicación (o producto) es una adición de grupos o conjuntos con el mismo número de elementos o una adición repetida un determinado número de veces de todos los elementos de un mismo grupo (o conjunto). Estas son técnicas fundamentales de conteo algebraico. Estas técnicas de conteo básicas, permiten saber el número de elementos en un conjunto determinado, son así las frecuencias de alumnos en cada semestre de los tele bachilleratos y, cuando consideramos la distribución de frecuencias por grupos de edad en una comunidad.

A partir de los cálculos que hicimos de la frecuencia relativa podemos saber quién de qué grupos tienen mayor probabilidad de ser elegidos, del conjunto de las personas mayores de edad que se encuentran en la comunidad.

Este cálculo de probabilidad de que un evento sea igual a la medida entre el número total del **espacio muestral** o *del universo* de elementos en el que se inscribe el conjunto analizado se denomina *regla de Laplace.*

Lo anterior significa que si buscamos la probabilidad de elegir a una persona, un número, etc., en general un evento dentro de un espacio muestral o del universo de elementos, ésta estará determinada por el peso relativo de ese grupo en la población total (fr) y para ello calculamos la proporción de ese grupo en la población, es decir, dividiendo el tamaño del grupo entre el tamaño de la población de que se trate.

Espacio muestral: asociado a un experimento determinado representa el conjunto formado por todos los puntos o elementos muéstrales. Un espacio muestral estará denotado por S. Los espacios muéstrales tienen la propiedad de que están formados ya sea por un número Fnito o por uno contable de elementos muéstrales. Cuando lanzamos un dado tenemos solamente un número Finito de posibilidades: seis y éstas representan el espacio muestral Evento: en un espacio muestral discreto S es un conjunto de puntos muéstrales, es decir, cualquier subconjunto de S.

Árbol de probabilidad

Cuando realizamos un experimento en el que lanzamos un dado, y calculamos el número de casos posibles es sencillo, sabemos los resultados posibles son 6, es decir obtener 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Si el objetivo del experimento es obtener "par", podemos calcular mentalmente cuantos de los eventos esperados serían "favorables": 2, 4, 6.Es decir, al calcular la probabilidad de un evento A, que en este caso sería obtener un "par" al lanzar un dado tenemos:

P(A) = ¾ = 0.5 igual a 50%

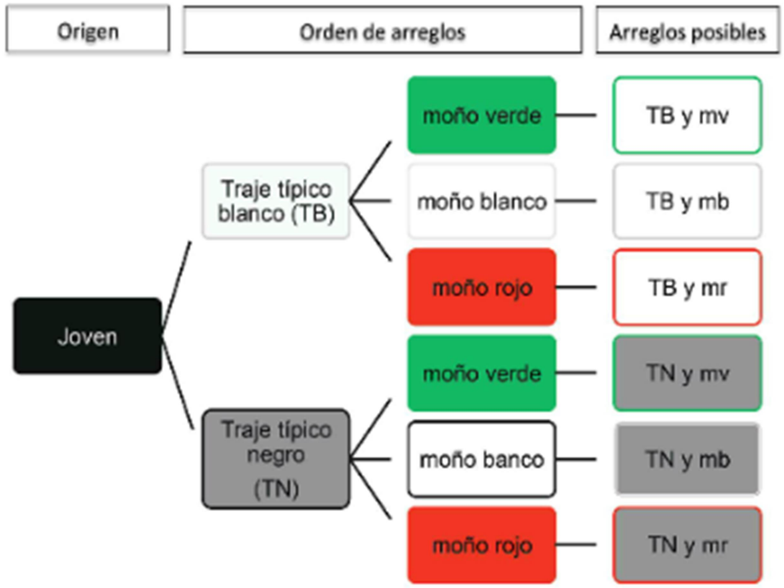
Sin embargo, el problema puede complicarse, cuando el número de posibilidades de obtener un evento esperado, por ejemplo cuando lanzamos 2 dados. En este caso buscar un “par” es más complicado que el ejemplo anterior y es cuando aplicamos las combinaciones y las permutaciones.

Si quisiéramos obtener número par al lanzar estos dos dados, nos podemos preguntar ¿cuántos eventos posibles esperados obtendremos al lanzar los 2 dados? Es así que según lo que estamos buscando, aplicaremos una técnica que ya conoces, la del árbol de probabilidad pero ahora aplicada a las combinaciones y permutaciones.

Imaginemos que para el 15 de septiembre se realizará una noche mexicana en tu comunidad y te corresponde a ti encargarte del vestuario de tus compañeros. Para esto, contamos con dos trajes típicos, uno blanco y otro negro, los cuales pueden combinarse con moños verde, blanco y rojo. ¿Cuáles son los posibles arreglos que se pueden realizar? Como lo viste en tu curso de Desarrollo Comunitario, una de las técnicas para realizar un diagnóstico comunitario es el llamado árbol de problemas. Esta es una técnica que nos permite establecer de manera visual la relación entre las causas, problemas y consecuencias de una situación negativa.

La aplicación de esta técnica en lo que llamamos árbol de probabilidad es porque nos permite también visualizarlas posibles combinaciones en los eventos que estamos analizando y con ello tener una mejor organización de los datos que vamos a utilizar. Representa los arreglos posibles que podemos obtener elementos en un conjunto, y representa que a partir de los datos proporcionados por los cálculos de la probabilidad.

En el siguiente esquema podemos darnos idea de los distintos arreglos que pueden realizarse a partir del árbol de problemas o de probabilidad que conoces:



Como podrás darte cuenta, los posibles arreglos a realizar son 6. Estos 6 posibles arreglos representan el marco muestral, que no resulta, sino demultiplicar el número de elementos por la cantidad de los complementos a combinar.

En este caso serían 2 los colores de los trajes de charro (TB Y TN); los moños serían los objetos a utilizarse como complementos en distintas combinaciones: (1) TB y moño verde, (2) TB y moño blanco y (3) TB y moño rojo, y (4) TN y moño verde, (5) TN y moño blanco y (3) TN y moño rojo. Todas hacen un total de 6 combinaciones Pensando en otros casos con mayor cantidad de datos hay otras opciones de cálculo, aunque el árbol de probabilidades siempre será útil para saber cuál es la cantidad de arreglos cuando queremos saber -de un conjunto de elementos distintos, cuantos arreglos podemos obtener.

Para tener en cuenta los tipos de arreglos cuando el conjunto tiene un número importante de elementos a considerar podemos utilizar el conteo multiplicativo y el aditivo.

Actividad de aprendizaje 2

Planteen un problema de tu comunidad y elaboren un árbol de problemas para su solución. Como sabrás, algunos problemas pueden ser solucionados de una manera más fácil siguiendo este procedimiento. Ahora, discutan y realicen en el mismo equipo los siguientes ejercicios:

1. Pedro es un escritor y además trabaja en un periódico como redactor. Por la mañana trabaja en el periódico y por la tarde escribe e investiga sobre los temas que le interesan. ¿De cuántas maneras puede utilizar el día?

2. En la comunidad se va a realizar un maratón donde participarán tanto hombres como mujeres. Andrés y María están haciendo un programa de entrena-miento a partir de ejercicios en dos actividades principalmente correr y andar en bicicleta. Durante los días de la semana puede correr o andar en bicicleta, pero durante los fines de semana, pueden jugar Futbol o voleibol. ¿Cuántos programas de ejercicio pueden realizar cada uno de ellos?

3. Diana se viste para ir al trabajo. Se va a poner una falda negra. No sabe si combinarla con una blusa rosada, blanca o azul. También podría usar zapa-tos negros, blancos o rosados. ¿Cuántos trajes posibles puede formar?

Aprende más

Conteo multiplicativo

El próximo 29 de Septiembre se organizará un evento por el "Día nacional del maíz". Guadalupe es la encargada recoger y llegar al evento con dos de los productores más reconocimos del estado. Este evento se llevará a cabo en la plaza principal de la capital del Estado.

Guadalupe tiene que recoger a Ramón y a Lorenzo. A Ramón lo recoge en el municipio llamado "La Loma" (lugar A) y a Lorenzo en "Rosales" (lugar B); Para llegar con Ramón a "La Loma" (lugar A) puede tomar 3 transportes distintos, y para ir por Lorenzo (al lugar B, los Rosales) hay 4 opciones para transportarse. En el momento en el que Guadalupe se encuentra reunida con Ramón y Lorenzo se dan cuenta que existen 2 alternativas para llegar a la capital del estado (Lugar C), ir en camión o en taxi comunitario, entonces la pregunta es ¿Cuántas maneras diferentes u opciones de transporte tiene Guadalupe para llegar al evento?

Guadalupe se encuentra en su municipio y tiene que llegar por Ramón a A (La Loma) tiene que elegir entre 3 posibilidades, para llegar por Lorenzo B (Rosales) 4y para llegar al evento en la capital del estado 2 entonces tenemos = 2X3X4X2= 48.48 son las posibilidades que tiene Guadalupe para llegar con Ramón y Lorenzo a la capital del estado al evento del Día del maíz.

Lo que acabamos de realizar, se le conoce como conteo multiplicativo, el cual te permitirá realizar una contabilidad del número posible de arreglos de los elementos dentro de uno o varios conjuntos. Dicho conteo se basa en una regla la cual consiste en lo siguiente:

El principio de multiplicativo, muestra que cuando tenemos dos conjuntos, y queremos extraer por ejemplo dos elementos uno de cada uno de ellos, y queremos conocer el número de extracciones o muestras posibles que obtendríamos al considerar todas las combinaciones posibles.

Es el caso de los dos tele bachilleratos, Loma Bonita y el Platanar. Si en la Ceremonia que habrá para la entrega de diplomas elegimos 4 alumnos de Loma Bonita y 3de El Platanar para que digan el discurso, cuál es el número de muestras posibles que podemos obtener al considerar a todos ellos.

De Loma Bonita = (mujer, hombre, hombre, mujer) y de El Platanar (hombre, hombre, mujer). ¿Cuál será el número de posible muestra, que contengan un individuo del grupo del Tele bachillerato de Loma Bonita y otro del Tele bachillerato El Platanar?

Si las enumeramos una a una tenemos el conjunto de estas muestras será: {mh, mh, mm, hh, hh, hm, hh, hh, hm, mh, mh, mm} lo cual representa un total de 12 muestras . Para calcular este número directamente solo tendríamos que multiplicar

4.3 (4 estudiantes del Tele bachillerato de Loma Bonita) y 3 que corresponden a los estudiantes del Tele bachillerato El platanar= 12.

Este número 12 representa el número de muestras posibles con los alumnos. Otra forma de conteo son las permutaciones y combinaciones, donde aplicaremos el conteo multiplicativo.

Permutación

Un caso particular del principio multiplicativo es el que se da cuando calculamos el número de permutaciones que podemos realizar con los elementos de un conjunto. Una permutación es una determinada ordenación de todas las que se pueden hacer con los elementos de un conjunto.

En cada una de estas ordenaciones entrarán todos los elementos del conjunto considerado sin repetirse ninguno de ellos. En cada permutación para un conjunto de n elementos tendremos que cubrir n posiciones. Así el número de permutaciones posibles para un conjunto de n elementos, aplicando el principio multiplicativo será:

$$Pn = n*(n-1)\ (n-2)n-3)*\ \ldots *4*3*2*1$$

En la primera posición en esta fórmula podemos colocar n elementos (cualquiera de los elementos del conjunto), pero en la segunda posición podremos colocar un elemento menos (n-1), ya que el que hemos colocado en la primera no puede aparecer ya en la segunda, y así sucesivamente, hasta cubrir las n posiciones: en la última posición solo podremos colocar el último elemento que nos queda. El número que nos resulta, es el producto de los n primeros números naturales que se llama factorial den y se escriben! Por lo cual tenemos:

$$n!= 1*2*3*4*\text{---}\ (n-3)*(n-2)*(n-1)\ *n$$

Como la multiplicación es una operación conmutativa, es decir, el orden de los factores no altera el producto, también podemos expresar n! De la siguiente manera:

$$n!=n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots 4*3*2*1$$

Con lo que tenemos que el número total de permutaciones de n elementos será Pn= n! Pondremos un ejemplo:

Si tenemos un conjunto de 8 elementos {a, b, c, d, e, f, g, h} para extraer sucesivamente los cinco elementos estos nos darán distintas combinaciones de los elementos del conjunto. Por lo que obtendremos distintas extracciones sucesivas con los cinco elementos.

Si aplicamos la regla multiplicativa de cálculo, el número de todos los modos posibles en este caso será:

P8= n! o cual significa: P8 = 8*7*6* 5*4*3*2*1= 40 320

Es decir: 8*7= 56; 56*6= 336; 336*5= 1680; 1680*4 = 6720 ; 6720*3 = 20160; 20160*2= 40320 ; 40320*1 = 40320

Por lo tanto estaremos ante un caso de permutaciones cuando queramos calcular el número de modos en que podemos extraer uno a uno, y sin reposición, todos los elementos de una población con un tamaño n.

Actividad de aprendizaje 3

Imagina que el Presidente Municipal está enterado de los proyectos que tú y tus compañeros realizaron a lo largo del 5º y 6º semestre en la materia Desarrollo Comunitario, y quiere que 5 equipos le expongan los proyectos en la sesión del próximo mes. Por lo anterior, queremos saber cuál es el número de permutaciones del conjunto de los 5 equipos, para saber el orden de exposición y realizar el evento lomas organizado posible, por lo que tenemos los equipos {a, b, c, d, e}

¿Cuantas permutaciones podemos identificar?________________

Realiza el ejercicio de manera individual utilizando el árbol de probabilidad y después coméntalo con tus compañeros y asesor. Si tienes duda o quieres saber cómo se resuelve este ejercicio, consulta el apéndice al final del libro.

Variaciones

Otra técnica de conteo para las probabilidades son las llamadas variaciones. Utilizamos las variaciones cuando no queremos extraer todos los elementos n del conjunto, sino solamente una parte de ellos (r), los modos en que podemos extraerlos se conoce como variaciones.

En este caso, si tenemos un conjunto de n elementos, a una ordenación de un número r de estos la llamamos variación de r elementos de un conjunto de n. Con lo cual r es menor que n y puede denotarse: $r < n$ ya que no estamos extrayendo todos los elementos, sino una parte de ellos.

Si en el ejemplo anterior, nos dice el coordinador que el Presidente Municipal solamente cuenta con 10 minutos para atender a 3 de los 5 equipos, por lo cual 2 equipos no podrán exponer por falta de tiempo y deberán dejar su trabajo escrito.

Es decir, solamente tenemos 3 posiciones para cubrir. En la primera posición podemos colocar a cualquiera de los 5 equipos, en la segunda cualquiera de los 4 elementos restantes y en la tercera cualquiera de los 3 que nos quedan.

Si aplicamos el principio multiplicativo, el número de maneras de ordenar 3 elementos de un conjunto de 5, por lo que tenemos:

$$V5,3= 5*4*3 =60$$

Es decir, de manera general, el número de variaciones de r elementos de un conjunto de n será:

$$Vn,r= n*(n-1)* (n-2) * ----(n-r+2)*(n-r*1)$$

Actividad de aprendizaje 4

En una caja hay dos canicas rojas y cinco verdes, si se extraen cuatro de ellas de la caja ¿en qué orden puede aparecer? Elabora un árbol de problemas para solucionar estas permutaciones. Discute los resultados con tus compañeros

Combinaciones

Una combinación es la manera en que pueden presentarse objetos o eventos de un conjunto, donde el orden de aparición no importa. Por ejemplo cuando multiplicamos 7 X 8 X 5 =280, o bien 5 X 8 X 7= 280 ó 8 X5 X 7= 280 obtenemos el mismo resultado, no importa el orden en que multipliquemos siempre obtenemos el mismo resultado. La fórmula general de las combinaciones: Combinaciones de n objetos tomados de r en r =

$$C_{n,r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Dónde: n es el número total de objetos o eventos y r es el número de objetos que se desea considerar. Aquí, n puede ser cualquier valor entero positivo y r puede ser cualquier valor entero positivo desde 1 hasta n. Si observamos que para cualquier pareja de números enteros positivos n y r, excepto r=1, el número de permutaciones es mayor que el de combinaciones. Por ejemplo, sin=7 y r= 4 entonces 7P4= 840 y 7C4= 35.

Es decir, en el caso de la permutación si tenemos n=7 y solamente queremos sacar4 elementos del conjunto tendremos lo siguiente:

7P4= 7*6*5*4= 8407 C4= 7*4=28 +7= 35

En una caja tenemos 6 cartas, marcadas con los números 1, 2, 3, 4, 5, y 6. Se quieren sacar al azar cuatro cartas. ¿De cuantas formas se pueden sacar las cartas dela caja?

En este caso sacaremos cuatro cartas de las 6 que tenemos en la caja y debemos realizar. Las combinaciones de n objetos tomados de r en r =

$$C_{n,r} = \frac{6!}{4!(6-4)!} \qquad C_{n,r} = \frac{6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1(6-4)} = \frac{720}{48} = 15$$

Es decir, las monedas seleccionada podrían ser las siguientes: 1234,1235,1236,1245,1246,1256,1345, 1346, 1356,1456,2345,2346,2356,2456 y 3456 es decir 15 maneras distintas en las que pueden combinarse las cartas al sacarlas de la caja.

Una combinación no representa una ordenación, es un subconjunto de elementos. En este caso no estamos ante extracciones sucesivas de los elementos de un conjunto sino ante una extracción simultánea de un grupo de elementos de este conjunto. En el ejemplo que hicimos más arriba.

La combinación de letras abcd es el conjunto constituido por los elementos {a, b, c, d}, y significa que abcd , es igual que bcad, bcda, cdab, dcba, etc., ya que contienen todas las combinaciones los mismos elementos, en este caso el orden en que los coloquemos es indiferente, ya que estamos ante una extracción simultánea de todos ellos.

El número de combinaciones de n elementos tomados de r en r, es decir, el número de subconjuntos de r elementos que podemos extraer de un conjunto de tamaño n, decíamos que era: Si volvemos al ejemplo de los equipos para exponer los trabajos, y la organización del evento con el Presidente Municipal, las combinaciones posibles del conjunto de equipos {a, b, c} tomadas dos a las vez.

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

n= el número total de objetos en un conjunto dado

r= el número de objetos, tomados a la vez para cada combinación

Cn,r= el número total de combinaciones de n objetos, tomado r a la vez

$$C_{n,r} = \frac{nPr}{r!}$$

$$C_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \Rightarrow C_{3,2} = \frac{3*2*1}{2*1(3-2)} = \frac{6}{2} = 3$$

Actividad de aprendizaje 5

Elabora un mapa conceptual donde diferencies las combinaciones de las permutaciones y variaciones. Adicionalmente propón un ejemplo cercano utilizando estas técnicas de conteo. Comenta con tu asesor y compañeros de clase. Discutan sobre las diferencias existentes y los ejemplos.